Melnikov の方法とその拡張(関数方程式の構造と方法)

矢ケ崎, 一幸

数理解析研究所講究録
984巻 1997年 86-91

Melnikovの方法とその拡張

岐阜大学工学部　矢ヶ崎一幸　(Kazuyuki Yagasaki)

1　はじめに

Melnikovの方法 [1]-[3] は強制力の作用する系の分数調波振動やカオス現象を調べるための解析手法であり，分数調波軌道や横断的なホモクリニック軌道の存在やサドル・ノード分岐やホモクリニック分岐の発生を示すことができる．しかしながら，具体的な系に適用する場合，分数調波解の安定性を決定するためには一般に複雑な計算が要求される．さらに，Hopf分岐に関しては，Wiggins[3] によってHopf分岐が起こる条件についての公式が与えられているものの，適用することは非常に困難である．

最近，Melnikovの方法が，著者 [5, 6] によって，容易に，分数調波解の安定性が決定でき，Hopf分岐の発生が調べられるように改良されている．さらに，ストレンジ・アトラクタの存在についての最近の結果 [4] を適用するためのホモクリニック分岐に関する十分な情報を与えることが可能なことも示されている．ここでは，この改良されたMelnikovの方法を概括し，さらに，その連成振動系への拡張についても手短に述べる．詳細については文献 [5]-[7] を参照されたい．

2　分数調波軌道

次の系を考える．

$$\dot{x} = J\mathrm{D}H(x) + \epsilon g(x, \omega t; \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

ここで，$0 < \epsilon \ll 1$，$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は十分に滑らかで，$g(x, \theta; \mu)$ はまたθに関して周期 2π で周期的であるものとする．さらに，$\mu \in \mathbb{R}$ はあるパラメータであり，J は2次の正方シンプレクティック行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．以下では，g の μ への依存性はしばしば省略されて表記される．$\epsilon = 0$ のとき，式 (1) はハミルトン関数 $H(x)$ を有する平面的なハミルトン系

$$\dot{x} = J\mathrm{D}H(x) \tag{2}$$

となる．式 (2) について以下のことを仮定する．

仮定 A1. 式 (2) は周期 $T^\alpha > 0$ をもつ周期軌道の連続的な族 $x^\alpha(t), \alpha \in (\alpha^1, \alpha^2)$, を有する（図1を参照）.

式 (2) は1自由度ハミルトン系であるから，ハミルトン関数が ϕ とは独立，すなわち，$H = H(I)$ となるような $x = (x_1, x_2)$ から作用・角変数 (I, ϕ) へのシンプレクティック変換が存在する [8]. $x^\alpha(t)$ に対する作用 I の値を I^α によって表す．$x^\alpha(t)$ の角振動数は$\Omega(I^\alpha) = (\mathrm{d}H/\mathrm{d}\alpha)(I^\alpha)$ によっ

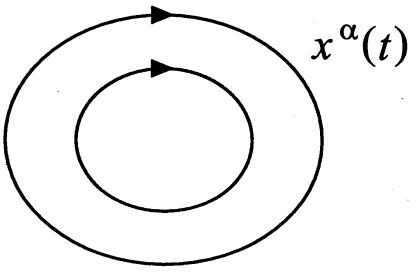

図1

て与えられる．m と n を互いに素な自然数とし，$\alpha^{m/n}$ を非退化の共鳴条件

$$m\Omega(I^{\alpha}) = n\omega, \quad \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}I}(I^{\alpha}) \neq 0 \tag{3}$$

が成立するような α の値とする．また，$T = 2\pi/\omega$ として

$$M^{m/n}(\theta) = \int_0^{mT} \mathrm{D}H(x^{\alpha^{m/n}}(t)) \cdot g(x^{\alpha^{m/n}}(t), \omega t + \theta)\,\mathrm{d}t,$$

$$L^{m/n}(\theta) = \int_0^{mT} \mathrm{tr}\,\mathrm{D}_x g(x^{\alpha^{m/n}}(t), \omega t + \theta)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

とおく．ここで，$\cdot$ はベクトルの内積を表す．関数 $M^{m/n}$ は**分数調波 Melnikov 関数**と呼ばれる．M や L の偏導関数を添字を付けて表記する．

定理 1. $M^{m/n}(\theta)$ が $\theta = \theta_0$ において単純な零点を有する，すなわち，

$$M(\theta_0) = 0, \quad M_\theta(\theta_0) \neq 0$$

であるものとする．このとき，十分に小さな $\epsilon > 0$ に対して，式 (1) は周期 mT の分数調波軌道を有する．さらに，もし

$$\Omega_I(I^{m/n}) M_\theta^{m/n}(\theta_0) < 0$$

ならばその分数調波軌道はサドル型であり，もし

$$\Omega_I(I^{m/n}) M_\theta^{m/n}(\theta_0) > 0$$

かつ $L^{m/n}(\theta_0) > 0$ (あるいは < 0) ならば沈点型 (あるいは 源点型) である．

定理 2. 点 (θ_0, μ_0) において次の 4 つの条件が成立するものとする．

(i) $M^{m/n} = 0$; (ii) $M_\theta^{m/n} = 0$; (iii) $M_{\theta\theta}^{m/n} \neq 0$; (iv) $M_\mu^{m/n} \neq 0$.

このとき，$\mu = \mu_0$ の近傍で m 次の分数調波軌道のサドル・ノード分岐が起こる．さらに，もし

(v) $M_{\theta\theta}^{m/n} M_\mu^{m/n} < 0$ (あるいは > 0)

ならばその分岐は超臨界 (あるいは亜臨界) である．

定理 3. ある点 (θ_0, μ_0) において次の 5 つの条件が成立するものとする．

(i) $M^{m/n} = 0$; (ii) $\Omega_I(I^{m/n}) M_\theta^{m/n} > 0$; (iii) $L^{m/n} = 0$; (iv) $M_\theta^{m/n} L_\mu^{m/n} - L_\theta^{m/n} M_\mu^{m/n} \neq 0$;

(v) $M_\theta^{m/n} L_{\theta\theta}^{m/n} - L_\theta^{m/n} M_{\theta\theta}^{m/n} \neq 0$.

このとき，$\mu=\mu_0$ の近傍で m 次の分数調波軌道の Hopf 分岐が起こる．さらに，もし

(vi) $\Omega_I(I^{m/n})(M_\theta^{m/n}L_{\theta\theta}^{m/n}-L_\theta^{m/n}M_{\theta\theta}^{m/n})$

が負 (あるいは正) ならばその分岐で生じる不変サークルは安定（あるいは不安定）である．

3　ホモクリニック軌道

式 (2) に関して次の仮定をする．

仮定 A2. 式 (2) においてホモクリニック軌道 $x^{\mathrm{h}}(t)$ を有する双曲的な不動点 x^0 が存在する．このとき $\lim_{t\to\pm\infty}x^{\mathrm{h}}(t)=x^0$ である．

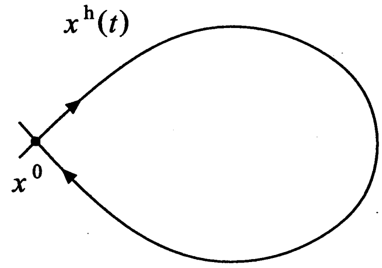

図 2

式 (1) に対して Poincaré 写像 P^ϵ を次のように定義する．

$$P^\epsilon : x(0)\to x(T). \tag{5}$$

ここで，$(x(t),\omega t)$ は式 (1) の解である．式 (2) に対する Poincaré 写像を P^0 によって表す．仮定 A2 から，x^0 は P^0 の不動点であり，その安定多様体と不安定多様体 $W^{\mathrm{s}}(x^0)$, $W^{\mathrm{u}}(x^0)$ は一致する．十分小さな $\epsilon>0$ に対しては，Poincaré 写像 P^ϵ はまた x^0 の近傍に双曲的な鞍点 x^ϵ を有するが，その安定多様体と不安定多様体 $W^{\mathrm{s}}(x^\epsilon)$, $W^{\mathrm{u}}(x^\epsilon)$ は分離し，横断的に交差する可能性がある．

$$M(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{D}H(x^{\mathrm{h}}(t))\cdot g(x^{\mathrm{h}}(t),\omega t+\theta)\mathrm{d}t \tag{6}$$

とおく．関数 $M(\theta)$ を**ホモクリニック Melnikov 関数**という．

定理 4. もし $M(\theta)$ が単純な零点を有するならば $W^{\mathrm{s}}(x^\epsilon)$ と $W^{\mathrm{u}}(x^\epsilon)$ は横断的に交差する．

これは Melnikov の方法の標準的な結果である（第 1 節で引用されている参考文献を参照せよ）．

Smale-Birkhoff のホモクリニック定理（たとえば，[2, 3]）により，$W^{\mathrm{s}}(x^\epsilon)$ と $W^{\mathrm{u}}(x^\epsilon)$ の横断的な交差は，それに属する軌道がある種の不規則な挙動を示す不変集合の存在を意味する．しかしながら，その不変集合はアトラクタではなく，よって，定理 4 の結果は，定常状態において存在するカオス挙動，すなわち，ストレンジアトラクタのメカニズムを説明するものではない．

ここで，

$$L(\mu)=\int_0^T \mathrm{tr}\,\mathrm{D}_x g(x^0,\omega t;\mu)\mathrm{d}t \tag{7}$$

とおく．

定理 5. もし $L(\mu) < 0$ ならば鞍点 x_μ^ϵ は散逸的，すなわち，$|\mathrm{D}_x P^\epsilon(x_\mu^\epsilon)| < 1$ となる．

定理 6. ある点 (θ_0, μ_0) において次の 4 つの条件が成立するものとする．

(i) $M = 0$; (ii) $M_\theta = 0$; (iii) $M_{\theta\theta} \neq 0$; (iv) $M_\mu \neq 0$.

このとき，$W^s(x_\mu^\epsilon)$ と $W^u(x_\mu^\epsilon)$ の間で生成的に開折された 2 次関数的なホモクリニックなタンジェンシーが起こる分岐点 $\mu = \mu_\epsilon (= \mu_0 + \mathcal{O}(\epsilon)$ が存在する．さらに，もし

(v) $M_{\theta\theta} M_\mu < 0$ (あるいは > 0)

ならば，$W^s(x_\mu^\epsilon)$ と $W^u(x_\mu^\epsilon)$ は$\mu > \mu_\epsilon$（あるいは $\mu < \mu_\epsilon$）のとき横断的に交差し，$\mu < \mu_\epsilon$（あるいは $\mu > \mu_\epsilon$）のとき交差しない．

Mora と Vianna [4] の最近の結果により，定理 5 と定理 6 の仮定が成立するとき，P_μ^ϵ がストレンジ・アトラクタを有するようなμ の正の Lebesgue 測度を有する集合が $\mu = \mu_0$ の近傍に存在する．

4 連成振動系

次に，上の結果を強制力の作用する，弱く連成した振動系のあるクラスへ拡張した結果を述べる．多自由度系におけるホモクリニック軌道に対する一般的な手法はまた Wiggins[9] によって与えられているが，その結果を連成の弱い系へ直接適用することはできない．

次の形の 2 自由度系を考える．

$$\dot{x}_j = J\mathrm{D}H_j(x_j) + \epsilon g_j(x_1, x_2, \omega t; \mu), \quad x_j \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1, 2. \tag{8}$$

ここで，$0 < \epsilon \ll 1$，$H_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と $g_j : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は十分滑らかであり，$g_j(x_1, x_2, \theta)$ は θ に関して周期 2π で周期的であるものとする．$\epsilon = 0$ のとき，式 (8) は 2 つの独立な 1 自由度ハミルトン系

$$\dot{x}_j = J\mathrm{D}H_j(x_j), \quad j = 1, 2 \tag{9}$$

となる．また，式 (8) に対する Poincaré 写像 P^ϵ を式 (5) のように定義する．まず，式 (9) の各々が仮定 A1 を満足するものと仮定する．

仮定 A1j. 式 (9) の各々は周期が $T_j^\alpha > 0$ である周期軌道の 1 パラメータ族 $x_j^\alpha(t), \alpha \in (\alpha_j^1, \alpha_j^2)$ を有する．

$j = 1, 2$ に対して m_j と n_j は互いに素とし，$m = (m_1, m_2)$ および $n = (n_1, n_2)$ とおく．非退化の共鳴条件

$$m_j \Omega_j(I_j^{\alpha_j}) = n_j \omega, \quad \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}I}(I^\alpha) \neq 0, \quad j = 1, 2, \tag{10}$$

が成立する$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ および $I^\alpha = (I_1^{\alpha_1}, I_2^{\alpha_2})$ の値を，それぞれ，$\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ および $\hat{I} = (\hat{I}_1, \hat{I}_2)$ によって表す．$x^{\hat{\alpha}}(t) = (x_1^{\hat{\alpha}_1}(t), x_2^{\hat{\alpha}_2}(t))$ を作用 $\hat{I}$ に対する周期軌道とし，m_0 を m_1 と m_2 の最小公倍数とする．次式によって**分数調波 Melnikov 関数**を定義する．

$$M_j^{m/n}(\tau) = \int_0^{m_0 T} \mathrm{D}H_j\left(x_j^{\hat{\alpha}_j}(t - \tau_j)\right) \cdot g_j\left(x_1^{\hat{\alpha}_1}(t - \tau_1), x_2^{\hat{\alpha}_2}(t - \tau_2), \omega t\right) \mathrm{d}t \tag{11}$$

$M^{m/n}(\tau) = (M_1^{m/n}(\tau), M_2^{m/n}(\tau))$ とおく．

定理 7. $\tau = \tau_0$ において

$$M^{m/n} = 0, \quad \det \mathrm{D} M^{m/n} \neq 0$$

が成立するものと仮定する．このとき式 (1) は周期 $m_0 T$ の周期軌道を有する．

式 (8) のパラメータ族を考える．

定理 8. 点 (τ_0, μ_0) において次の 4 つの条件が成立するものとする．

(i) $M^{m/n} = 0$; (ii) $\det \mathrm{D}_\tau M^{m/n} = 0$;

(iii) $C_j^{m/n} \equiv \dfrac{\partial M_1^{m/n}}{\partial \tau_j}\dfrac{\partial M_2^{m/n}}{\partial \mu} - \dfrac{\partial M_2^{m/n}}{\partial \tau_j}\dfrac{\partial M_1^{m/n}}{\partial \mu} \neq 0$ （$j = 1$ または 2）；

(iv) $K^{m/n} \equiv C_1^{m/n}\dfrac{\partial}{\partial \tau_2}\det \mathrm{D}_\tau M^{m/n} + C_2^{m/n}\dfrac{\partial}{\partial \tau_1}\det \mathrm{D}_\tau M^{m/n} \neq 0.$

このとき $\mu = \mu_0$ の近傍において周期 $m_0 T$ の周期軌道のサドル・ノード分岐が起こる．さらに，もし $K^{m/n} > 0$ (あるいは < 0) ならばその分岐は超臨界（あるいは亜臨界）である．

次に式 (9) の各々が仮定 A2 を満足するものと仮定する．

仮定 A2j. 式 (9) の各々においてホモクリニック軌道 $x_j^{\mathrm{h}}(t)$ を有する双曲的な鞍点 x_j^0 が存在する．

仮定 A2j から Poincaré 写像 P^ϵ は点 $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ の近傍に，その安定多様体と不安定多様体，$W^{\mathrm{s}}(x^\epsilon)$ と $W^{\mathrm{u}}(x^\epsilon)$，が横断的に交差する可能性のある双曲的な鞍点 x^ϵ を有することがわかる．

2 つのタイプの**ホモクリニック Melnikov 関数**を次式によって定義する．

$$M_j(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{D}H_j\left(x_j^{\mathrm{h}}(t-\tau_j)\right)\cdot g_j\left(x_1^{\mathrm{h}}(t-\tau_1), x_2^{\mathrm{h}}(t-\tau_2), \omega t\right)\mathrm{d}t, \quad j = 1, 2,$$

$$\tilde{M}_1(\tau_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{D}H_1\left(x_1^{\mathrm{h}}(t-\tau_1)\right)\cdot g_1\left(x_1^{\mathrm{h}}(t-\tau_1)), x_2^0, \omega t\right)\mathrm{d}t,$$

$$\tilde{M}_2(\tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{D}H_2\left(x_2^{\mathrm{h}}(t-\tau_2)\right)\cdot g_2\left(x_1^0, x_2^{\mathrm{h}}(t-\tau_2)), \omega t\right)\mathrm{d}t \tag{12}$$

ここで，$\tau = (\tau_1, \tau_2)$ である．$M(\tau) = (M_1(\tau), M_2(\tau))$ とおく．

定理 9. $\tau = \tau_0$ において

$$M = 0, \quad \det \mathrm{D}M \neq 0$$

と仮定する．このとき $W^{\mathrm{s}}(x^\epsilon)$ と $W^{\mathrm{u}}(x^\epsilon)$ は横断的に交差する．

定理 10. $j = 1$ または 2 に対して $\tilde{M}_j(\tau_j)$ が $\tau_j = \tau_{j0}$ において単純な零点を有するものとする．このとき $W^{\mathrm{s}}(x^\epsilon)$ と $W^{\mathrm{u}}(x^\epsilon)$ は横断的に交差する．

式 (8) のパラメータ族を考える．

定理 11. 点 (τ_0, μ_0) において次の 4 つの条件が成立するものとする．

(i) $M = 0$; (ii) $\det \mathrm{D}_\tau M = 0$; (iii) $C_j \equiv \dfrac{\partial M_1}{\partial \tau_j}\dfrac{\partial M_2}{\partial \mu} - \dfrac{\partial M_2}{\partial \tau_j}\dfrac{\partial M_1}{\partial \mu} \neq 0$ （$j = 1$ または 2）；

(iv) $K \equiv C_1\dfrac{\partial}{\partial \tau_2}\det \mathrm{D}_\tau M + C_2\dfrac{\partial}{\partial \tau_1}\det \mathrm{D}_\tau M \neq 0.$

このとき$\mu = \mu_0$ の近傍に 2 次関数的なホモクリニックなタンジェンシーが起こる分岐点が存在する．さらに，もし $K > 0$（あるいは < 0）ならばその分岐は超臨界（あるいは亜臨界）である．

定理 12. 点 (τ_{j0}, μ_0) において次の 4 つの条件が成立するものとする．

$$\text{(i) } \tilde{M}_j = 0;\ \text{(ii) } \frac{\partial \tilde{M}_j}{\partial \tau_j} = 0;\ \text{(iii) } \frac{\partial^2 \tilde{M}_j}{\partial \tau_j^2} \neq 0;\ \text{(iv) } \frac{\partial \tilde{M}_j}{\partial \mu} \neq 0 \quad (j = 1 \text{ または } 2).$$

このとき $\mu = \mu_0$ の近傍に 2 次関数的なホモクリニックなタンジェンシが起こる分岐点が存在する．さらに，もし

$$\frac{\partial^2 \tilde{M}_j}{\partial \tau_j^2} \frac{\partial \tilde{M}_j}{\partial \mu} < 0 \quad (\text{あるいは} > 0)$$

ならばその分岐は超臨界（あるいは亜臨界）である．

式 (8) の Poincaré 写像 P_μ^ϵ のような高次元の写像に対しては，2 次元写像に対する Mora と Vianna の結果 [4] のような一般的な理論が存在しないことを注意する．

本稿では非退化の共鳴条件 (3) あるいは (10) を仮定したが，非線形性の弱い系を含めた退化した共鳴の場合が文献 [5] で議論されている．そこでは Melnikov の方法を用いて余次元 2 の分岐を解析できることも示唆されている．また，文献 [7] では，連成振動系の分数調波軌道の安定性に対する公式も与えられている．さらに，連成の弱い振動系の結果はそれ程困難なく連成の強い振動系へ拡張できるであろう．

参考文献

[1] V. K. Melnikov, On the stability of the center for time periodic perturbations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12** (1963), 1–56.

[2] J. Guckenheimer, and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[3] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Springer-Verlag, New York, 1990.

[4] L. Mora, and M. Vianna, Abundance of strange attractors, *Acta Math.*, **171** (1993), 1–71.

[5] K. Yagasaki, The Melnikov theory for subharmonics and their bifurcations in forced oscillations, *SIAM J. Appl. Math.*, **56** (1996), 1720–1765.

[6] K. Yagasaki, Bifurcations and chaos in forced oscillations: a refinement of the Melnikov theory, *Nonlinear Dynamics* (D. Inman and A. Guran, eds.), World Scientific, Singapore, to appear.

[7] K. Yagasaki, Periodic and homoclinic motions in forced, coupled oscillators, submitted for publication.

[8] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1989.

[9] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos.* Springer-Verlag, New York, 1988.